『数学教室』(2016年7月号)

特集

みんなで学ぼうホントの算数・数学—楽しくなくちゃやる気にならない—③

ユークリッドの互除法と不定方程式の授業

◎氏家　英夫

はじめに

高校サークルの仲間がさそってくれるので，この10年くらい毎年数教協全国大会に参加してきました。その中でも，昨年の8月に仙台で行われた全国大会はいろいろ刺激されるレポートがたくさんあって，私にとって収穫の多い大会でした。特に小林俊道氏の講座での互除法の指導と，竹中芳夫氏の分科会レポート「不定方程式の簡便な求め方」に教えられることが多かったです。

そこで，大会後に，2つのレポートで学んだことを中心に「ユークリッドの互除法と不定方程式」の授業プランを作成し，実践しました。授業は白樺高校2年生の普通科2クラスで行われました。

1　ユークリッドの互除法

私はそれまで「ある長方形を一辺が最大の正方形で敷き詰める」という問題を，生徒に興味をもたせる形で提示することができませんでした。

これを小林氏は「縦や横の長さを測らずに，紙を折って最大の正方形に」分割するときの，「縦の等分の仕方について」選択肢をたてて，生徒に問いかけます。

この議論の中で「どんな縦の等分割でも変化のない線がある」ことが，生徒の中から発見されるといいます（小林俊道「発見のある授業をめざして一整数」全国大会講座レポート）。この過程を，縦横の長さの数の計算で対応させることによって，互除法の計算方法ができあがることになります。

2　不定方程式の簡単な解き方

教科書にあるユークリッドの互除法による不定方程式の特殊解を求めるやり方は，除法の式に余りを表す式を代入していくという，目的がよくわからない煩雑な計算によるもので，以前の授業ではほとんど生徒に理解してもらえませんでした。

これに対し竹中氏のレポートで紹介されたやり方（もともとは黒田俊郎氏発信とのこと）は，途中の計算の意味がよくわかり，たいへん理解しやすいと思います。

例えば，$45x+32y=1$ の特殊解を求めます。互除法であまり1まで計算します。この計算を次の書式で表します。

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 2 & 1 \\ 6) & 13) & 32) & 45 \\ & \underline{12} & \underline{26} & \underline{32} \\ & 1 & 6 & 13 \end{array}$$

ここで

$$\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

はそのままにして，この過程を $a=45$　$b=32$ とおいて文字で計算します。

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 2 & 1 \\ -2a+3b) & a-b) & b) & a \\ & \underline{-4a+6b} & \underline{2a-2b} & \underline{b} \\ & 5a-7b & -2a+3b & a-b \end{array}$$

となって，最後の余り $5a-7b=1$ ですから，$x=5$ と $y=-7$ が解であることがわかります。

このやり方によって，$ax+by=c$ の形の不定方程式が，c が a，b の最大公約数 g の倍数のとき解をもつということを，生徒が自然に納得できる形で指導する道が開けたと感じています。

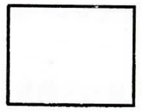
3　授業プランと授業の様子

第1章　ユークリッドの互除法

○長方形を正方形でしきつめる

ここで扱う長方形はすべて，縦と横の長さが6cmと10cmのように，ぴったり整数値のものとします。そのような長方形を，一辺ができるだけ大きな正方形で，ぴったりしきつめることを考えます。

問題1　次の長方形を一辺ができるだけ大きな正方形でぴったりしきつめるとき，その正方形の一辺の長さは縦の長さの何等分になるか予想してください。



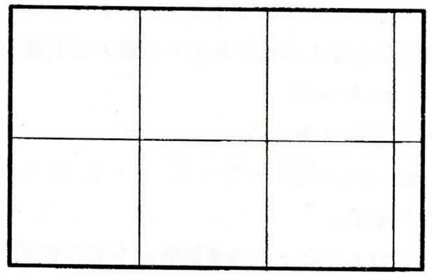
予想　ア　2等分
　　　イ　3等分
　　　ウ　4等分
　　　エ　5等分
　　　オ　それ以上（　等分）

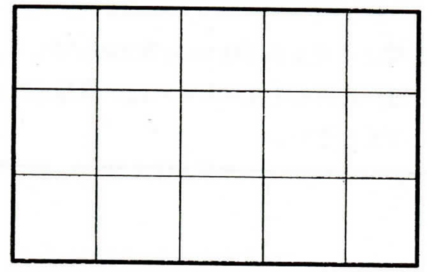
実際に生徒に切った長方形を配って，ちょうど2等分や3等分でピッタリになる長方形をいくつか扱います。折ることによる誤差が出ますが，「予想する」ということで簡単に進めます。

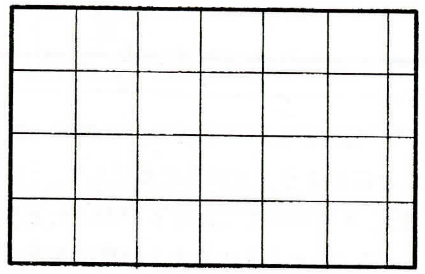
そのうえで縦12cm横19cmのピッタリにならない長方形を配り，同じように予想します。

問題4　それでは，次の長方形を一辺ができるだけ大きな正方形でぴったりしきつめるとき，その正方形の一辺の長さは縦の長さの何等分になるか予想してください。

問題4の長方形は，図のように2等分でも3等分でも4等分でもうまくいきません。







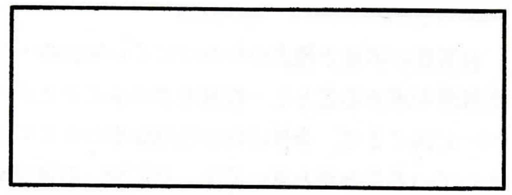
問題5　しかし，これらの図に縦の何等分でも変化のない線があります。それは何の線でしょうか。

A組ではすぐに，B組ではしばらく考えてから「正方形だ」と答えてくれました。

この変化のない縦の線は正方形の辺の線でした。このことから「縦を等分割した正方形でぴったりしきつめる」ことを考えるとき，「正方形をのぞいた余りで考えればよい」ということがわかります。

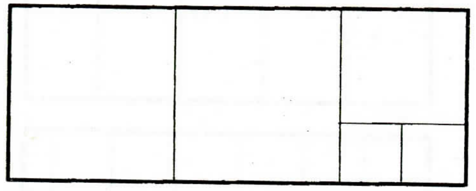
次に，この過程を式で表すことを考えます。

問題7　次の長方形について，次々と正方形を除くことによって，ぴったり敷きつめることができる一辺が最大の正方形を見つけてください。



問題7の長方形は縦9 cm 横24cmでした。

問題8　正方形を次々ととり除く過程を，式で表してください。



$24-9$　$15-9$ という2回の引き算を「割り算で表すことにしよう」ということにして，「このように整数 a, b について《a を b で割ったときの余りを r とすると，a と b の最大公約数は b と r の最大公約数に等しい》ということを原理に，次々と余りで割る数を割って，最大公約数を求める方法をユークリッドの互除法といいます」とまとめます。

第2章　不定方程式

1節　不定方程式の整数解を求める

$ax+by=c$　(a, b, c は整数)

の整数解を求めることを考えます。この形の方程式を，2元1次不定方程式といいます。

問題1　次の不定方程式は整数解をもつでしょうか。○×で予想してください。理由があれば理由も書いてください。

① $4x+2y=8$

② $4x+2y=5$

③ $6x+3y=12$

④ $6x+3y=10$

⑤ $14x+7y=49$

⑥ $14x+7y=27$

教科書の不定方程式がわかりにくい原因の一つは特殊解を求めることと一般解を求めることとがバラバラに出てきて，全体に何が目標かがわかりにくくなっていることだと思います。そこで，特殊解を求める節と一般解の節に分けて，まず問題1で不定方程式が整数解をもつ条件を考えます。

整数を係数とする不定方程式 $ax+by=c$ は整数解をもたないこともあります。

例えば②の $4x+2y=5$ を満たす整数解 x, y は存在しません。x と y が整数のとき，$4x$ と $2y$ はともに2の倍数ですから $4x+2y$ は2の倍数であって，右辺も2の倍数でなければなりません。

一般に不定方程式 $ax+by=c$ が整数解をもつ条件は，

c が a と b の最大公約数の倍数である

ということです。

しかし，最大公約数が簡単にはわからないことがよくあります。そんな時活躍するのが，ユークリッドの互除法です。

問題2　$52x+39y=26$ の整数解を一組見つけてください。

52と39の最大公約数を互除法で求めてみると

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 1 \\ 13\,) & 39\,) & 52 \\ & \underline{39} & \underline{39} \\ & 0 & 13 \end{array}$$

となり最大公約数は13。ここで

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 1 \\ ) &) & \end{array}$$

はそのままにして $a=52$, $b=39$ と文字で置き換えて同じ計算をします。

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 1 \\ a-b\,) & b\,) & a \\ & \underline{3a-3b} & \underline{b} \\ & -3a+4b & a-b \end{array}$$

0になるひとつ前のあまりが最大公約数だから

$a-b=13$

26 は 13×2 だから

$2a-2b=26$ となって，$x=2$, $y=-2$ となります。

このような一組の整数解を不定方程式の特殊解といいます。

ところで，c が a と b の最大公約数の倍数であれば整数解をもつということは，a と b が互いに素（最大公約数が1）であれば右辺 c がどんな整数でも整数解をもつということになります。

問題3　$45x+32y=1$ の特殊解を一組見つけてください。

授業では「イコール1なら簡単ということなんだ」と発言した生徒もいて，ねらいが理解されていると感じました。

2節　不定方程式の一般解

問題4　不定方程式 $2x-3y=0$ の整数解の組をできるだけたくさん見つけてください。

不定方程式 $2x-3y=0$ は

移行すると $2x=3y$ となり，x は3の倍数，y は2の倍数になる。

つまり，$2x-3y=0$ の整数解は

$x=3m$　$y=2m$　(ただし m は整数)

一般に　$ax-by=0$ の整数解は，a と b が互いに素のとき

$ax=by$ より

$x=bm$　$y=am$　ただし m は整数　となる。

この形の解を不定方程式の一般解という。

練習　次の不定方程式の一般解を求めてください。

① $5x-4y=0$　　② $2x-7y=0$

問題5　$2x-3y=1$……①

の特殊解を求め，それを使って一般解を求めてください。

(ヒント　特殊解 p, q が見つかると①に代入して $2\times p-3\times q=1$……②という式が成り立ちます)

一般に　$ax+by=c$……①

という不定方程式の，特殊解 p, q が存在するとき

$ap+qy=c$……②

①−②より

$a(x-p)+b(y-q)=0$　だから

$a(x-p)=-b(y-q)$

$a(x-p)=b(q-y)$

したがって

$x-p=bm$　$q-y=am$　となるので

$x=bm+p$　$y=q-am$　と表されます。

問題6　$23x+7y=1$ の一般解を求めてください。

授業プランを終えた数週間後に，後期中間試験がありました。採点をしていたらこの授業プランで扱った範囲の問題のできがものすごくよかったので，問題の正答率を出してみました。

問題8　ユークリッドの互除法を用いて次の2つの数の最大公約数を求めなさい。　265　371

A組44人中37人　B組44人中40人の正答

77/88で正答率88%

問題9　ユークリッドの互除法を用いて次の分数を約分しなさい。　377/435

A組44人中32人　B組44人中31人の正答

63/88で正答率72%

問題10　次の不定方程式の特殊解を1組見つけなさい。　$93x+40y=1$

A組44人中17人　B組44人中18人の正答

35/88で正答率40%

白樺学園高校は数学を不得手とする生徒が多いので，この結果は大変な好成績だと思っています。

（北海道・白樺学園高等学校）