積分と微分の授業（1）

♠氏家　英夫

はじめに

アクティブラーニングやICT教育など教育方法に関する様々な言説が主張される今日においても，「数学教育は数学を教える教科である」（遠山啓1960年）というスローガンは，少しもその新鮮さを失っていません。すべての子どもに，確実に数学的概念を形成するのが数学教育の課題とされ，そのための方法論的基盤として「量に基づく数学教育」という視点が提起されました。この「量の理論」によって，数とその計算の実在的根拠が明確にされ，量は数と計算の指導過程に実体的イメージを豊かに与えることとなりました。

「量に基づく数学教育」という視点は，関数指導の分野においても，関数指導の中心を量的変化の解析におき，とりわけ時間を独立変数とする変化・運動を主な分析の対象とするという方向を生み出しました。しかし，量に基づく微積分の指導内容を授業のレベルで造り上げることは，いまだに重要な課題だと思います。どのような量のどのような変化を解析するかという問題への，授業過程をふくめた提案が求められています。

そこで，今回から3回の連載では，高校数学での最初の微積分の授業過程について，今年度白樺学園高校において実際に取り組んだ積分と微分の授業をもとに考えていきます。

第Ⅰ部　面積と積分

教科書では積分は，微分が指導された後に，逆微分（原始関数）としての積分が指導されます。しかし，ここでは積分の＜微小な量の和の極限値＞という側面が全く扱われません。積分法は古代より求積法として微分法とは独立に発展してきたもので，それが力学の成立の過程や曲線の理論の形成の過程で微分法の逆の演算であることが意識されてきました。「概念的に考えると接線法と求積法の間には何の関係も認められませんし，実際微分法と積分法の理論体系は別個に構築されていくのですが，ある段階で『微積分学の基本定理』が宣言されて，微分と積分は互いに他の演算の逆演算であるという，意外な事実が明らかにされます」[1]。積分法と微分法とを独立に指導してはじめて，その相互の関連—微積分学の基本定理—を扱うことができると思います。

そこでこの授業では，最初に面積を考えることから積分の導入を行うことにしました。まず直線図形の面積から考えます。

第1章　直線図形の面積

1　面積とはなにか

質問　面積とはなにか。小学校の教科書では「広さのことを面積といいます」と説明している。しかし，この説明は少しおかしなところがある。どこがおかしいと思うか。

「川の広さとか部屋の広さとか面積とは違うよね」と「広さ」という言葉と面積の概念の違いに目を向けるための質問です。

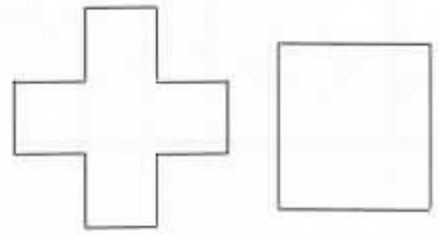
2　面積の性質

面積とは，さしあたり平面内の図形 A のなんらかの大きさ $M(A)$ である。この $M(A)$ の持つ基本的な性質として，次の2つの性質があげられる。

Ⅰ　A と B が合同な図形ならば $M(A)=M(B)$
Ⅱ　A が B に含まれるならば $M(A)<M(B)$

この2つの性質だけでは面積を互いに比較することはできないが，分解合同における保存と呼ばれる次の性質がある。

問題1　次の2つの図形の面積はどちらが大きいと思うか。比較しなさい。



授業では上質紙に印刷したものを配り，生徒にハサミで切って考えてもらいます。意外に苦労しますが，一人が成功すると瞬く間に広がります。

Ⅲ　（分解合同）　$A=A_1+A_2$ ならば
$M(A)=M(A_1)+M(A_2)$

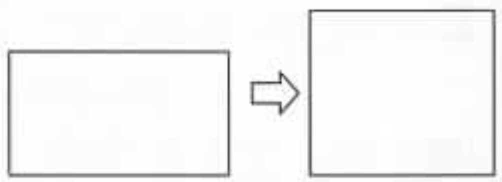
3　面積の比較

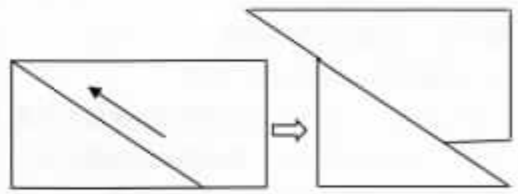
直線図形の場合，この3つの性質だけで図形の面積の比較がたちあわせと呼ばれる有限回の操作で可能であることが証明できる。

問題　次のような三角形をたちあわせて，同底で高さ1/2の長方形と分解合同であることを示しなさい。

定理1　三角形は同底で高さが1/2の長方形と分解合同である。

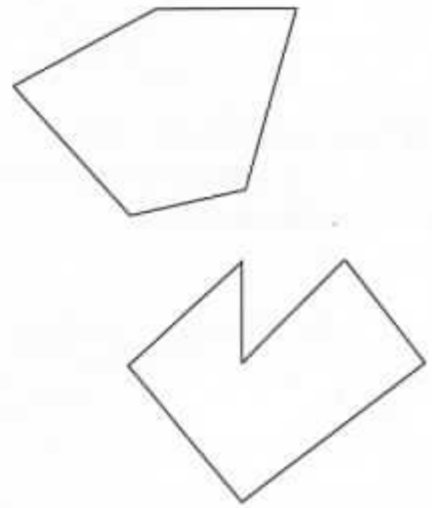
問題2　次の長方形をたちあわせて，横の長さが与えられた長さとなる長方形と分解合同であることを示しなさい。





定理2　（長方形の標準化）長方形は与えられた一辺をもつある長方形と分解合同である。

問題3　これまでの定理をつかって，このような多角形の面積を比較するにはどうすればよいか。



多角形を三角形に分割しそれぞれを長方形にたちあわせ，長方形の横の長さをそろえれば，大きな長方形どうしになって比較できる。このことによって，次の定理が示された。

定理3　多角形は，ある長方形と分解合同である。

この定理によってすべての多角形について，性質Ⅰ，Ⅱ，Ⅲによって比較される面積という量が定義される。

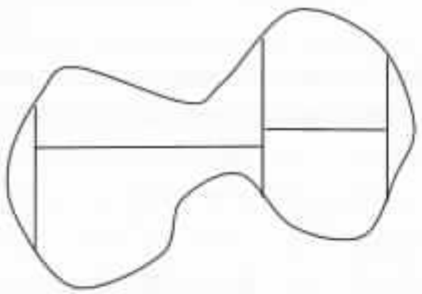
こうして，直線図形の面積はすべて長方形で比較可能となりました。

第2章　曲線図形の面積

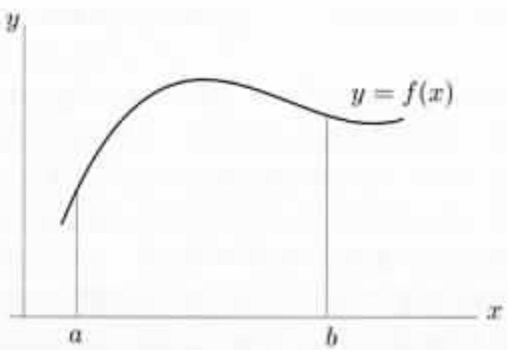
1　曲線図形の面積を数で表す

第1章で，われわれは直線図形の面積を定義した。この第2章では，曲線図形の面積に対してその大きさを数で表すことを考える。

簡単にするため次の図のように，曲線に囲まれた図形をいくつかに分割し，一方だけが曲線に囲まれた図形に対し，その面積を考える。



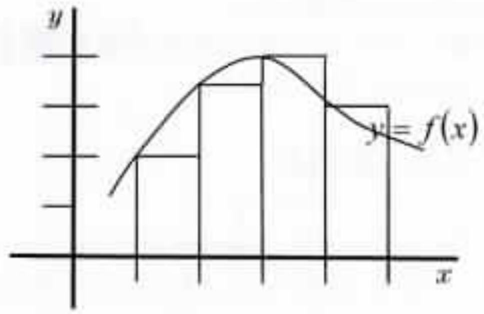
つまりわれわれは図のように，曲線 $y=f(x)$ と $x=a$　$x=b$　x 軸によって囲まれた図形に対してその面積を考えていく。



問題1　$y=f(x)$ の下の図形の面積を求めるためにはどうしたらよいだろうか。自分の考えを書きなさい。

授業ではとくに発言はなかったが，事後にプリントを冊子にして提出してもらったものを見ると，「直線にする」とか「一直線に線を引く」「曲線の部分を直線にする」などの考えが何人かのプリントに記されていた。曲線図形の面積を直線図形によって近似するということが自然な発想であることを示していると思います。

2　リーマン和



この $y=f(x)$ の下の図形を等しい幅に切って，高さ $y=f(x)$ の長方形をつくり，その面積の和を考えよう。

例えば，区間［a，b］を4等分して，それぞれの上に高さ $f(x_0)\ f(x_1)\ f(x_2)\ f(x_3)$ の長方形をつくる。この長方形の面積の和Σは，区間の幅 $\frac{b-a}{4}$ を Δx と表すと

$\Sigma =$

$f(x_0)\cdot\Delta x+f(x_1)\cdot\Delta x+f(x_2)\cdot\Delta x+f(x_3)\cdot\Delta x$

となる。

問題2　$a=1,\ b=5$ で区間を4等分（$\Delta x=1$）としたときの，この長方形の面積の和の値を求めよ。

このような長方形の面積の和を $f(x)$ の a から b までのリーマン和といい，長方形の面積（縦×横）を a から b までたしていくという意味で

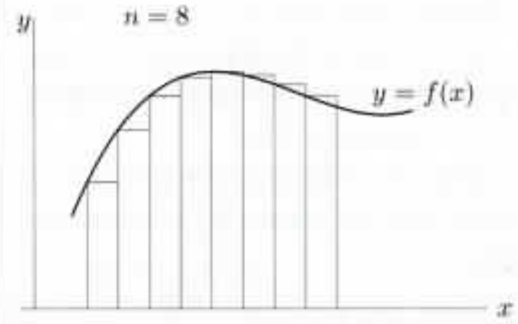
$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x$　で表す。

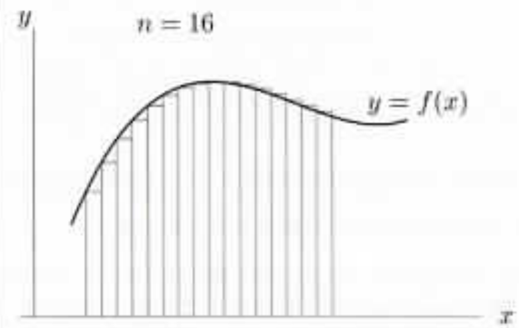
定義　$f(x)$ の a から b までのリーマン和

$$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x = f(x_0)\cdot\Delta x+f(x_1)\cdot\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\cdot\Delta x$$

（ただし　$x_0=a$　$x_n=b$　$\Delta x=\frac{b-a}{n}$）

このリーマン和は n を大きく（Δx を0に近づける）すると $f(x)$ の下の面積にどんどん近づくであろう。





$f(x)$ が x の式で表されれば，そのリーマン和 $\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x$ は，n をどんどん大きくしていく（Δx をどんどん小さくしていく）ことによって，その下の面積に近づくことが予想できる。

このことを半径1の円について確かめてみる。簡単のため，図のような $\frac{1}{4}$ 円について考える。

もとの円の方程式は

$x^2+y^2=1$　だから

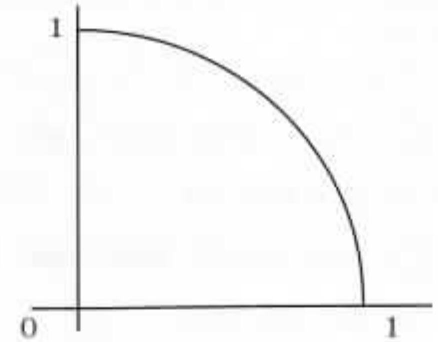
$y^2=1-x^2$

ルートしてプラスの方だから

$y=\sqrt{1-x^2}$　となる。

つまり $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

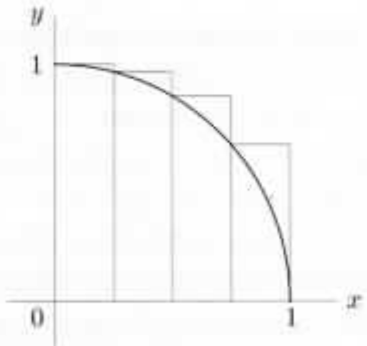
この $f(x)$ について $\sum_0^1 f(x)\cdot\Delta x$ を求める。



問題3　区間［0，1］を4等分した時（$\Delta x=0.25$）の

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ のリーマン和を求めよ。

$f(x)$ の値は

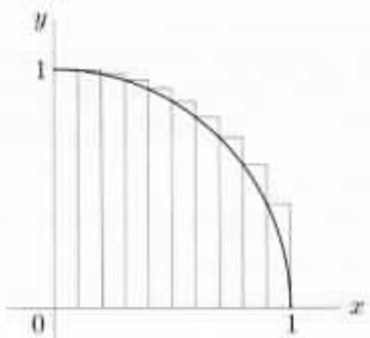


$\sum_0^1 f(x)\cdot\Delta x=$

問題4　区間［0，1］を10等分した時（$\Delta x=0.1$）の

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ のリーマン和を求めよ。

$f(x)$ の値は



$\sum_0^1 f(x)\cdot\Delta x=$

こうして

$n = 4$　$\Delta x = 0.25$　のとき

$\sum_0^1 f(x)\cdot\Delta x = 0.8749$　4倍で　3.4956

$n = 10$　$\Delta x = 0.1$の　とき

$\sum_0^1 f(x)\cdot\Delta x = 0.8260$　4倍で　3.3043

$n = 20$　$\Delta x = 0.05$　のとき

$\sum_0^1 f(x)\cdot\Delta x = 0.8071$　4倍で　3.2285

となって，どんどん円の面積（3.14159…）に近づいていく。

授業では携帯の電卓を用いて授業を進めましたが，ルートキーのついている電卓で進めたほうがよかったです。$n = 10$ まで実際に計算し，$n = 20$ と $n = 100$ の場合のエクセルでつくった表を生徒に配りました。$n = 100$ で 3.16…　$n = 200$ で 3.15…　$n = 400$ で 3.14…になります。小学校で 3.14 を習って以来ここではじめて，円周率を自分の手で求める手立てを手に入れることができたことになったと思います。

3　定積分

Δx に対する $f(x)$ の a から b までの

リーマン和　$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x$

は分割の数 n を大きくすることによって，

Δx をどんどん小さくしていけば，

$f(x)$ の下の面積の値 S に，われわれが望むだけ近づけることができる。

問題5　Δx を小さくしていけばリーマン和

$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x$　はこの面積の値 S といつかは一致するだろうか。

予想　ア　一致する

　　　イ　一致しない

　　　ウ　どちらとも言えない

予想は手を挙げた全員がイとなりました。「だってあまってる」という意見がほとんどでした。

n が有限のときにはいくら n を大きくしてもこの値 S と

リーマン和　$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x$

との差はわずかに残る。

そこで　$f(x)$ の下の面積の値 S というのは，n を無限にして Δx を「無限小」にした場合のリーマン和であると考える。

面積 S を　分割の幅 Δx を無限小 dx にした場合の $f(x)\cdot dx$ を無限に加えた和であると考える。

$S = f(x)\cdot dx + f(x)\cdot dx + \cdots$無限$\cdots + f(x)\cdot dx$

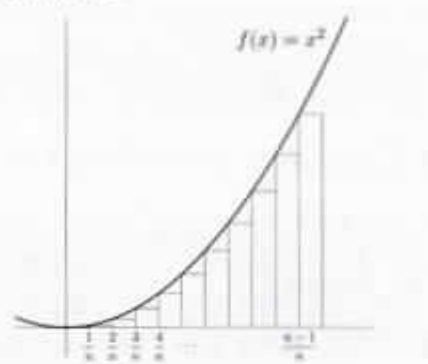
これを $f(x)$ の a から b までの定積分といい，

$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$　と表す。

（インテグラル a から b までの $f(x)dx$ と読む）

このように定積分を定義して，はじめて定積分の記号の意味が自然に理解されると思います。

例　$f(x) = x^2$ の　0から1までの $f(x)$ の下の面積を求める。



リーマン和は

$$\sum_0^1 x^2\cdot\Delta x = 0^2\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} \cdots\cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ でくくると

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$\frac{1}{n^3}$ でくくると $= \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2\}$

2乗の和の公式に当てはめると結局

$$\sum_0^1 x^2\cdot\Delta x = \frac{1-\frac{1}{n}}{6}\cdot\frac{2-\frac{1}{n}}{1}$$　となる。

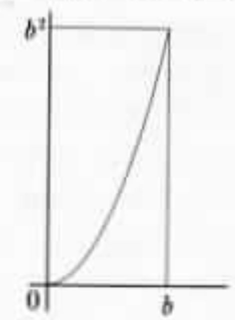
ここで，$\Delta x = \frac{1}{n}$ を無限小 dx にすると

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

今回の授業では「なぜ$\frac{1}{6}$なのか」と質問されて困ったので，やはり2章に入る前にΣkとΣk^2の公式を簡単に扱っておく必要を感じました。

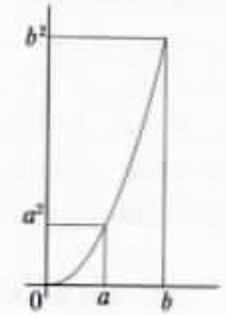
問題6　次のグラフは $f(x) = x^2$ のグラフである。この $f(x) = x^2$ の 0 からある点 b までの定積分 $\int_0^b x^2 dx$ の値はどうなるかを予想しなさい。

（ヒント　たて b^2 横 b の長方形の面積は b^3）



問題7　$f(x) = x^2$ の a から b までの定積分

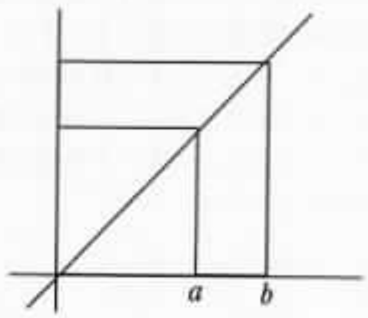
$\int_a^b x^2 dx$ は，どのような値になるか。



$$\boxed{\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$$

問題8　$f(x) = x$ の a から b までの定積分

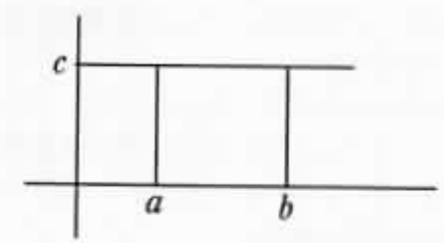
$\int_a^b x\ dx$ はどのような値になるか。



$\int_a^b x\ dx =$

問題9　$f(x) = c$ の a から b までの定積分

$\int_a^b c\ dx$ はどのような値になるか。



$\int_a^b c\ dx =$

紙数の関係で線形性と練習問題は省略します。次は不定積分の指導から考えます。

注1）『微分積分学の誕生』（高瀬正仁，SBCreative）

（北海道・白樺学園高校）