量から微積分へ（その３）
微分・積分

◆氏家　英夫

はじめに

教科書では積分は微分が指導された後に，逆微分としての不定積分，定積分の順で指導されます。しかし，積分法は古代より求積法として微分法とは独立に発展してきたもので，それが力学の成立の過程で微分法の逆の演算であることが意識されてきました。積分法と微分法とをある程度独立に指導して，はじめてその相互の関連―微積分学の基本定理―を扱うことができます。

1　直線図形の面積

直線図形の面積の比較において最も基礎的なことは＜多角形の面積は，有限回のたち合わせによってすべて比較可能である＞ということにあります。この面積を量として基礎づけている基本性質を，それ自体として指導することが，面積指導の中心とならなければならないと思います。このとき核となるのは長方形の標準化のたち合わせです。

標準化を通じて，すべての直線図形の面積が有限回のたち合わせによって比較可能な量であることが示されます。

第１部　直線図形の面積

面積の性質

> 面積とは，さしあたり平面内の図形 A のなんらかの大きさ $M(A)$ である。この $M(A)$ の持つ基本的な性質として，次の２つの性質があげられる。
>
> Ⅰ　A と B が合同な図形ならば $M(A) = M(B)$
> Ⅱ　A が B に含まれるならば　$M(A) < M(B)$

さらに，互いにはみ出す図形の面積比較から，

> Ⅲ　（分解合同）
> $A = A_1 + A_2$ ならば $M(A) = M(A_1) + M(A_2)$

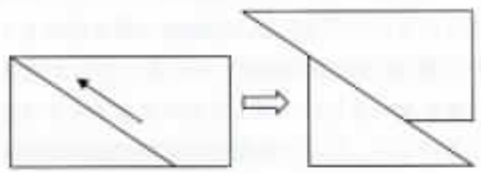
が成り立つことを確かめます。

面積の比較

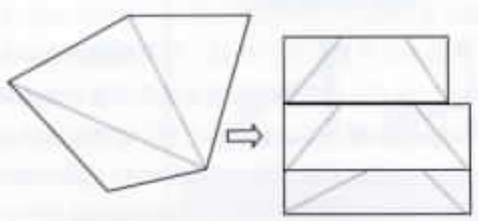
直線図形の場合，この３つの性質だけで，図形の面積の比較が，たち合わせと呼ばれる有限回の操作で可能であることが証明できます。

> **定理１**　三角形は同底で高さが 1/2 の長方形と分解合同である。

> **定理２**　（長方形の標準化）
> 長方形は与えられた一辺をもつある長方形と分解合同である。



さらに，このように多角形を三角形に分割しそれぞれを長方形にたち合わせ，長方形の横の長さをそろえれば，大きな長方形どうしになって比較できます。このことから次の定理が示されます。



> **定理３**　多角形はある長方形と分解合同である。

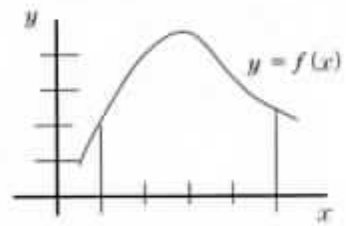
この定理によってすべての多角形について，性質Ⅰ，Ⅱ，Ⅲによって比較される面積という量が定義されます。

2　曲線図形の面積

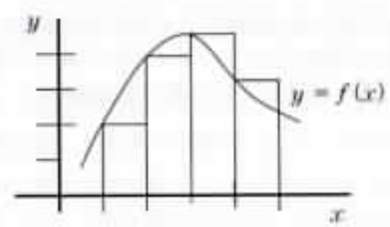
ここから極限の問題があらわれますが，ここでは lim によらず無限小 dx を用いて展開します[1]。

(1)　曲線図形の面積を数で表す

> 第１部でわれわれは直線図形の面積を定義した。この第２部では，曲線図形の面積に対して，その大きさを数で表すことを考える。
>
> 簡単にするため次の図のように，曲線に囲まれた図形をいくつかに分割し，一方だけが曲線に囲まれた図形に対し，その面積を考える。
>
> われわれは図のように，曲線 $y = f(x)$ と $x = a$　$x = b$　x 軸によって囲まれた図形に対してその面積を考えていく。



(2)　リーマン和



> われわれは，この $y = f(x)$ の下の図形を等しい幅に切って，高さ $y = f(x)$ の長方形をつくり，その面積の和を考える。
>
> 例えば，区間 $[a,\ b]$ を４等分して，それぞれの上に高さ $f(x_0)\ f(x_1)\ f(x_2)\ f(x_3)$ の長方形をつくる。これらの長方形の面積の和Σは区間の幅 $\frac{b-a}{4}$ を Δx と表すと
> $\Sigma =$
> $f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x$
> となる。

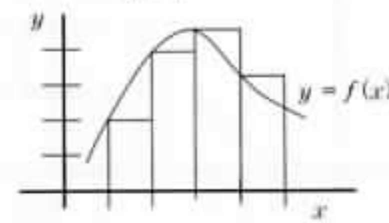
> **問題**　$a = 1$，$b = 5$ で，区間を４等分（$\Delta x = 1$）としたときの，この長方形の面積の和の値を求めよ。
>
> このような長方形の和を $f(x)$ の a から b までのリーマン和といい，
> 長方形の面積（縦×横）を a から b までたしていくという意味で
> $$\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x$$
> で表す。

> **定義**　$f(x)$ の a から b までのリーマン和
> $\sum_a^b f(x)\cdot\Delta x = f(x_0)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$
> （ただし　$x_0 = a$　$x_n = b$　$\Delta x = \frac{b-a}{n}$）

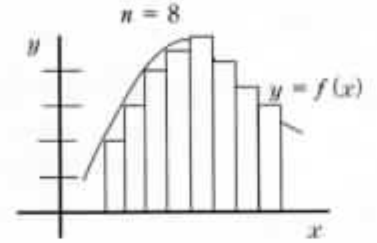
(3)　定積分

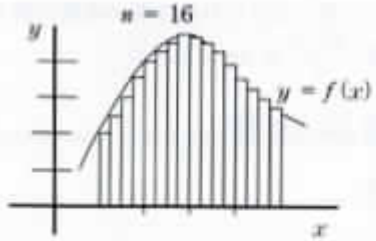
> このリーマン和は n をどんどん大きく（Δx を 0 に近づける）すると $f(x)$ の下の面積にどんどん近づく。

$n = 4$



$n = 8$





そこで$f(x)$の下の面積の値は、nを無限にしてΔxを無限小にしたときのリーマン和であると考える。

つまり$f(x)$の下の面積Sは、分割の幅Δxを無限小dxにした$f(x)\,dx$を無限に加えた和であると考える。

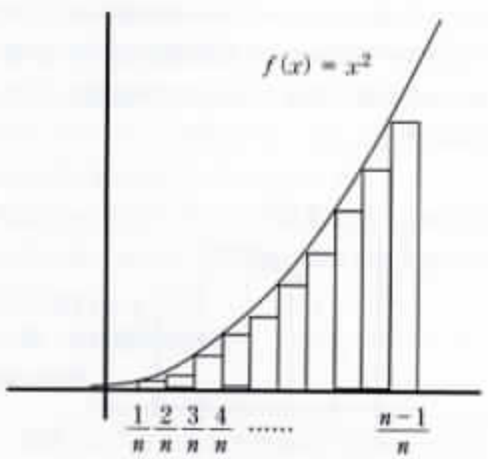
$S = f(x)\,dx + f(x)\,dx + \cdots$無限$\cdots + f(x)\,dx$

これを$f(x)$のaからbまでの定積分といい、

$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$ と表す。

(インテグラルaからbまでの$f(x)\,dx$と読む)

例 $f(x) = x^2$の0から1までの$f(x)$の下の面積を求める。



リーマン和は

$$\sum_0^1 x^2 \cdot \Delta x = 0^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\cdots\cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$でくくると、

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$\frac{1}{n^3}$でくくると、

$$= \frac{1}{n^3}\left\{1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2\right\}$$

2乗の和の公式に当てはめると結局

$$\sum_0^1 x^2 \cdot \Delta x = \frac{1-\frac{1}{n}}{6} \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{1}$$

となる。

ここで、$\Delta x = \frac{1}{n}$を無限小dxにすると

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

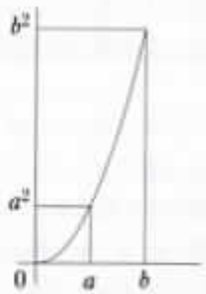
問題 次のグラフは$f(x) = x^2$のグラフである。この$f(x) = x^2$の0からある点bまでの定積分

$\int_0^b x^2 dx$の値はどうなるかを予想しなさい。

(ヒント たてb^2横bの長方形の面積はb^3)

問題 $f(x) = x^2$のaからbまでの定積分

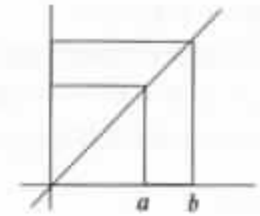
$\int_a^b x^2 dx$はどのような値になるか。



$\boxed{\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$

問題 $f(x) = x$のaからbまでの定積分

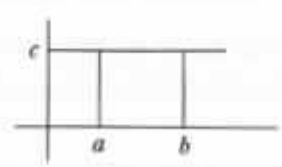
$\int_a^b x\,dx$はどのような値になるか。



$\int_a^b x\,dx =$

問題 $f(x) = c$のaからbまでの定積分

$\int_a^b c\,dx$はどのような値になるか。



$\int_a^b c\,dx =$

3 落下運動と微分

運動の解析をもとに微分の指導を考えるとき、一様でない運動の典型的な自然現象は落下運動なので、いわば薄めた落下運動ともいうべき斜面の実験の分析によって授業を展開します。

具体的には、自然落下運動について「どちらが速く落ちると思いますか」として、いろいろな問題を考えたうえで、「落下運動は非常に速いので変化の様子を直接調べるのは難しい」ので、「落下運動の本質を変えないで速さはおそくなるような運動」ということで「斜面をころがるボールの運動の様子を調べる」ことになります。

斜面の運動

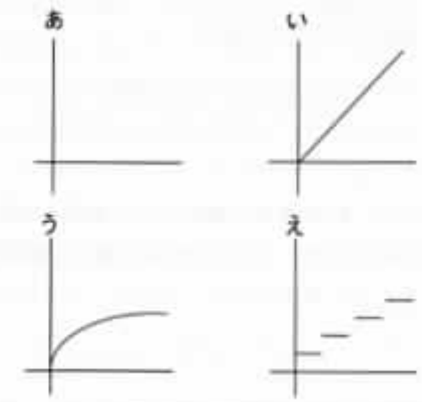
角度をうまく調節すれば、斜面の1目盛り1mとし、そこを通過する時間を1秒とすることができる。これ以降このデータを使って考えていく。

x秒	0	1	2	3	4	……
y m	0	1	4	9	16	……

問題 この運動を式で表せ。

問題 この運動をグラフで表せ。

問題 実験でわかるように、この運動の速度はどんどん増えていく。この速度の増え方はどのようになっているか、次のグラフから予想しなさい。



平均速度を求める

速度の増え方を調べるために、まず1秒間の平均速度を求めてみる。

$$平均速度 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta x =$

時間x秒	0	1	2	3	4
距離y m	0	1	4	9	16

$\Delta y =$

0〜1秒後の平均速度 =

1〜2秒後の平均速度 =

2〜3秒後の平均速度 =

3〜4秒後の平均速度 =

瞬間速度を求める

平均速度はもちろん平均なので，ちょうど1秒後2秒後3秒後……の瞬間の速度ではない。

そこで例えば，ちょうど3秒後の瞬間速度を考えるために，どんどん時間の幅を小さくした平均速度を求めてみる。

問題　3秒後からの時間の幅を小さくした次の平均速度を求めなさい。

$\Delta x =$

時間 x 秒	3	3.001	3.01	3.1
距離 y m	9			9.61

$\Delta y =$

3〜3.1秒後の平均速度＝

3〜3.01秒後の平均速度＝

3〜3.001秒後の平均速度＝

こうして3秒後からの時間の幅をどんどん小さくしていけば，平均速度は6 m/秒に近づいていく。

そこで，我々は0に無限に近い無限小 dx というものを考え，この dx 秒間の速度を瞬間速度と考えることにする。

問題　$y = x^2$ で表される斜面の運動について，3秒後から $3+dx$ 秒後までの平均速度を求めることによって，3秒後の瞬間速度を求めなさい。

$\Delta x =$

時間 x 秒	3	$3+dx$
距離 y m	9	

$\Delta y =$

定義　一般に，ある関数 $y = f(x)$ に対して，

$$\frac{df(x_1)}{dx}$$ を

$y = f(x)$ の x_1 における微分係数という。

$y = x^2$ で表される斜面の運動について1秒後，2秒後，4秒後の瞬間速度を求めたうえで，次の問題に取り組みます。

このように $y = x^2$ の斜面の運動において

0秒後の瞬間速度　0 m/秒

1秒後の瞬間速度　2 m/秒

2秒後の瞬間速度　4 m/秒

3秒後の瞬間速度　6 m/秒……となって

時間に速度が比例しているように思える。

このことを確かめるために，一般に x 秒後の瞬間速度を表す式を求めよう。

問題　$y = x^2$ で表される斜面の運動について，x 秒後から $x+dx$ 秒後までの平均速度を求めることによって x 秒後の瞬間速度を求めなさい。

$\Delta x = dx$

時間 x 秒	x	$x+dx$
距離 y m	x^2	

$\Delta y =$

定義　x 秒後の距離 ym を表す $y = f(x)$ に対し，x 秒後の瞬間速度を表す関数

$$\frac{df(x)}{dx}$$ を関数 $y = f(x)$ の導関数という。

これを $f'(x)$ とか y' とも表す。

問題　地球上の自然落下運動では，x 秒後の落下距離 ym はおよそ $y = 5x^2$ で表される。

①このときの瞬間速度 y' m/秒を表す導関数を求めよ。

$\Delta x = dx$

時間 x 秒	x	$x+dx$
距離 y m	$5x^2$	

$\Delta y =$

②1秒後，2秒後，3秒後の瞬間速度を求めよ。

問題　$y = ax^2$ の導関数を求めなさい。

$\Delta x = dx$

時間 x 秒	x	$x+dx$
距離 y m	ax^2	

$\Delta y =$

公式1　関数 $y = ax^2$ の導関数は

問題　ある新型ロケットは，打ち上げた瞬間からの x 秒後の距離 ym が $y = x^3$ で表されるという。

このロケットの x 秒後の瞬間速度の式を求めなさい。

$\Delta x = dx$

時間 x 秒	x	$x+dx$
距離 y m	x^3	

$\Delta y =$

公式2　関数 $y = ax^3$ の導関数は

問題　x 秒後の距離 ym が $y = 6x$ で表される等速運動について，x 秒後の瞬間速度を表す式を求めなさい。

問題　x 秒後の距離 ym が $y = 4$ で表される運動について，x 秒後の瞬間速度を表す式を求めなさい。

問題　白樺高校のエースピッチャーが真上に向かって初速40m/秒でボールを投げ上げたとき，x 秒後の高さ ym を表す式は

$y = 5x^2+40x$

で表されるという。x 秒後の瞬間速度を表す式を求めなさい。

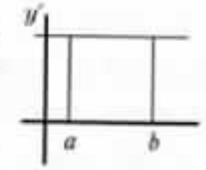
こうして3次までの整式の微分が求められることになります。最後に速度から距離を求めることで，定積分との関係を考えます。

4　速度から距離を求める

問題　x 秒後の瞬間速度が $y' = x$ で表される斜面の運動について，2秒後から5秒後までに転がる距離を求めなさい。

速度から距離を求める

速度の式から距離を求めることを考える。等速運動の場合，その進む距離は，速度×時間 で右の図のような長方形の面積となる。



この問題のような速度の変化する運動の場合，その進む距離は，瞬間速度 y' と無限小 dx との積を無限に加えたものであるから，これを

$\int_a^b y'\,dx$ と表すことができる。

これは第1部で扱った定積分である。

微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。この記号を使えば第1部の定積分は次のように表すことができる。

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

こうして独立に扱われてきた積分と微分が互いに逆の関係であることを示すことができました。

注1）キースラー『無限小解析の基礎』（東京図書）を参照。

（北海道・白樺学園高校）