量から微積分へ（その２）
関数の指導

◆氏家　英夫

はじめに

教科書での関数の扱いは，代数的な扱いとグラフの指導に終始していて，量の変化の法則性を分析するという解析学本来の視点が欠落しています。古典解析学が力学との深い結びつきの中で発展してきたことを考えれば，自然の量的変化の解析こそが関数指導の基本とならなければならないと思います。

１月号に続いて，ここでは１次関数，２次関数，指数関数，対数関数について，量の解析に基づく授業の展開を考えます。

1　1次関数

１次関数は正比例関数 $g(x)$ の一種の相対化です。この相対性は等速運動の例でいえば，速度 a m/s の運動を任意の時刻 (b) でながめるという形で生じます。このときの状態を c とすれば

$$f(b) = c$$

ここからの変化量を問題にすると

$$f(x) - c = a(x - b)$$

となります。この形を１次関数の標準形と呼びましょう。b という任意の時点から出発して比例が観察されること，ここに１次関数の固有の内容があります。

授業では，最初に増分 Δx と Δy を変化を調べる道具として導入したうえで，次の問題を提示します。

> **問題**　次の２つの等速運動はどちらが速い運動といえるか。
>
> A　$\Delta x = 3$ のとき　$\Delta y = 15$（３秒間に15cm 進む）
>
> B　$\Delta x = 5$ のとき　$\Delta y = 20$（５秒間に20cm 進む）

「速さを比べるには？」ということでいろいろな意見が出るところですが，「１秒間に進む距離で比べる」とまとめ，「それを Δ で表すと」ということで，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 変化率$$　とします。

> **１次関数の定義**
>
> ともなって変化する２つの量があるとき，
>
> $$変化率\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 一定$$
>
> の関数を１次関数とよぶ。変化率が一定なので１次関数はある x に対する y の値が一組わかれば，変化の様子がすべてわかる。

次に，与えられた初期条件 $(b,\ c)$ と変化率から運動を表す表を完成させ，１次関数の式を求めます。

> **問題**　変化率３，初期条件（２，５）である１次関数について，次の問いに答えなさい。
>
> | x 秒 | | 2 | | x | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | y cm | | 5 | | y | |
>
> ①時刻が２秒後から x 秒後に変わり，距離が５cm から $y$cm に変わったと考えて Δx，Δy を求めよ。
>
> ②変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を表す式を求めよ。
>
> ③初期条件 $(p,\ q)$ 変化率 a の１次関数の式を求めよ。

こうして１次関数の標準形

$$y - q = a(x - p)$$　が得られます。

一般形　$y = ax + b$　は，初期条件 $(0,\ b)$ の場合としてあらわれます。

> **問題**　水の出る速さが５L/分の蛇口でお風呂の水を入れる。測り始めたときすでに７Lの水が入っていた。このときの一次関数の式を求めよ。
>
> 変化率は　　　初期条件は
>
> この形を一般化すると　変化率 a　初期条件 $(0,\ b)$ の一次関数の式は
>
> $$y = ax + b$$
>
> これを，１次関数の一般形とする。

2　2次関数

標準化によって比例関係となる１次関数に対し，２次関数は非一様変化をしめす関数のひとつです。その典型的な例は，自然落下や斜面の運動のような等加速度運動となるでしょう。

いま０秒のとき位置０cm からスタートした斜面の運動を観察すれば，Δx 一定のとき Δy は１，３，５，…の奇数列の割合で変化します。ガリレオはその『新科学対話』の中で，このことを定理の系として次のように述べています。

「ゆえにもし運動の端緒からかぞえて任意の等しい時間間隔，……をとり，それらの時間内に……だけの距離を通過するものとすれば，これらの距離は相互に，１，３，５，７等の奇数列の比を成す」

さらに，p 秒後に $q$cm の位置からこの運動がスタートした場合，いつどの位置からスタートしても１，３，５，…という変化の様子は変わらないので，

$$y - q = a(x - p)^2$$

と表すことができます。この形を２次関数の標準形と呼びましょう。

まずは，実際の落下運動を観察するところから始めます。

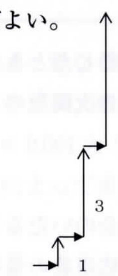
> **1　ものの落ちる速さ**
>
> **問題**　ピンポン玉と消しゴムを同じ50cm ほどの高さから落としてみます。どちらが速く落ちると思いますか。

いろいろな高さから落としてみますが，「非常に速い落下運動の変化の様子を直接調べるのは難しい」ことから，斜面をころがるボールの運動の様子を調べることとします[1]。

> **2　変化を調べる**
>
> 次のデータはある斜面のボールの運動を記録したものである。このデータをもとに，斜面のボールの運動の様子を調べてみよう。
>
> | x 秒 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | y cm | 0 | 30 | 120 | 270 | 480 | … |
>
> **問題**　$\Delta x = 1$ として Δy を調べなさい。
>
> **問題**　30cm を１目盛りとした表を作り $\Delta x = 1$ として Δy を求めなさい。

「地球上で物体を落下させ，x 秒後の落下距離を ym とすると，およそ $y = 4.9x^2$ と表されることが知られている。ここでは簡単のため $y = 5x^2$ としておこう」として，$a = 5$ のときの Δy の増え方を見たうえで，「$y = ax^2$ と表される２次関数は $(0,\ 0)$ のところから　$\Delta x = 1$ のとき，Δy は $1a$，$3a$，$5a$，…と変化する」とまとめます。

このあと　$y = ax^2$ のグラフの書き方も，この変化の法則に基づき指導します。

> **問題**　$y = x^2$ のグラフを書いてみよう。
>
> $y = x^2$ のグラフは $(0,\ 0)$ の点からスタートして $\Delta x = 1$ のとき，Δy は１，３，５，…と変化する。さらに x の負の値に対しては，対称に点をとればよい。
>
> 
>
>
> $y = ax^2$ のグラフは，頂点から $\Delta x = 1$ のとき，Δy は１，３，５…に係数 a をかけた $1a$，$3a$，$5a$，…と変化する。

標準形は斜面のボールの運動をp秒後にqmの位置から観察することから得られます。

３　２次関数の標準形

問題　ある斜面のボールの運動を観察すると，以下の表のようになった。

x秒	0	1	2	3	4	…
ym	0	1	4	9	16	…

①　この運動のΔxとΔyを求め，この運動を表す式を求めよ。

②　この斜面の実験を繰り返していたとき，ぼんやりしていて，時計が動き出してから３秒後に２mの位置からボールがスタートしてしまった。このときの表を完成しなさい。

x秒	3	4	5	6	7	…
ym	2					…

③　スタート時点（３，２）から$(x,\ y)$までの増加分$x-3$，$y-2$の表をつくりなさい。

$x-3$						…
$y-2$						…

④　このときのxとyの関係を表す式をつくりなさい。

$y-2=$

<まとめ>

p秒後にqmの位置からスタートした係数aの斜面の運動は

$$y-q=a(x-p)^2$$

このように頂点が移動したときも１，３，５，…の法則でどこからでも２次関数のグラフが書けます。

３　指数関数

指数現象は自然や社会のいたるところで見いだされます。解析学は「自然現象の量の変化の法則性を定式化することから発生・発展したもので，その中核をなすものは“指数関数”」[2]です。等倍変化する量の例としては，増加関数になり（大量現象としては）連続的変化を示す点からバクテリアの増殖をとるのがよいと思います。変化の法則性としては，指数関数が＜増加速度が現在量に比例するという自然な関係＞を表す微分方程式の解となって現れることが重要です。

１　指数の拡張

乳酸菌や大腸菌などの細菌をまとめてバクテリアと呼びます。バクテリアは土の中や空気や水の中，人間のおなかの中などいたるところに存在しています。バクテリアなどの単細胞生物は，適した環境のもとでは，全体として見れば，一定の時間に一定の割合で増えていきます。

問題　いま１時間にもとの量の２倍になるバクテリアがある。

①　１時間後，２時間後，……にもとの量の何倍になっているか。

−3	−2	−1	0	1	2	3
2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}

②　それでは１時間前，２時間前，……にはもとの量の何倍になっているか。

同じように分数指数への拡張を行います。

問題　大腸菌O157は１時間に10倍もの割合で増えるという。$\frac{1}{2}$時間後にはおよそもとの量の何倍になっているか。

時間	0	$\frac{1}{2}$	1
	10^0	$10^{\frac{1}{2}}$	10^1

問題　１時間で10倍に増えるとき，$\frac{1}{3}$時間後にはおよそ何倍か。

次に増え方を比べる方法として，倍率と相対変化を導入します。

２　倍率と相対変化

問題　ある研究所で乳酸菌の増え方を研究している。Aという種類の乳酸菌は１時間で80mgから100mgに増え，Bという種類の乳酸菌は１時間で150mgから180mgになった。

どちらの増え方が大きいか。

変化の比べ方には，差で比べる方法と倍率や相対変化で比べる方法があります。ものごとの成長や上昇を比べるときは，もとの量に対する倍率や相対変化で比べることが自然です。

量y_1がy_2に変化したとき

$\frac{y_2}{y_1}$　を倍率

$\frac{y_2-y_1}{y_1}$　を相対変化という。

相対変化をr，増加分をΔyとすれば$r=\frac{\Delta y}{y_1}$

こうして相対変化一定（倍率一定）という量の変化の法則に基づいて指数関数を定義できます。

３　指数関数

問題　20分で２倍になるバクテリアについて次の問いに答えなさい。

①　１時間で何倍になるか。

②　観察スタートの時５mgだったとして，次の対応表を完成しなさい。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y				5			

③　x時間後の重さ$y$mgを求める式をつくりなさい。

$y=$

問題　先の例についてΔxを１時間として相対変化を求めよ。

$\Delta x=$

x時間	0	1	2	3	4
y mg	5	40	320	2560	20480

$\Delta y=$

$\frac{\Delta y}{y}=$

これをもとに次のように指数関数が定義されます。

Δxが一定の時，倍率aが一定（相対変化rが一定）の関数を指数関数という。

式で表せば

$y=ca^x$　または　$y=c(1+r)^x$

（ただしcは$x=0$のときのyの値，

$a>0$，$a\neq1$，$r>-1$，$r\neq0$）

とくに，$\frac{\Delta y}{y}=r$（一定）から

$$\Delta y=ry$$

となり，指数関数ではyの変化量Δyはそのときのyの量に比例しています。

４　増加速度

バクテリア自身の増加の能力を調べるために，平均増加速度$\frac{\Delta y}{\Delta x}$と，相対平均増加速度$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y}$を考える[3]。

指数関数ではΔx一定ならば相対平均増加速度も一定になります。さらに，瞬間の増加速度を考えます。ここでは$dx=0.001$としておおまかな瞬間増加速度を関数電卓によって求め，そのときの相対増加速度$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$を求めて行きます。ここでも$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=k$だから，増加速度は現在量$y$に比例します。

例えば，$y=2^x$のとき

$dx=0.001$

x 時間	0	0.001	0.002…………	1
y mg	1	$2^{0.001}$	$2^{0.002}$	……2

$dy = 0.000693387$

増加速度　$dy/dx = 0.69338746$

相対増加速度　$dy/dx/y = 0.69338746$

この値，相対増加速度（相対変化率）が1になる指数関数があれば，増加速度 dy/dx が y の値と一致します。相対変化率が1になる指数関数の倍率を，関数電卓を用いて捜せば，おおまかな e の値が求められます。

ここで（0，1）からの増分を $\Delta x = 1/n$ として求めると，$\Delta y = a^{\frac{1}{n}} - 1$，相対変化率を1とすると，$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ となります。両辺を n 乗して極限をとれば e の定義を得ることができます[4]。

$\Delta x = 1/n$

x 時間	0	$1/n$	$2/n$ …………	1
y mg	1	$a^{\frac{1}{n}}$	$a^{\frac{2}{n}}$ …………	a

$\Delta y = a^{\frac{1}{n}} - 1$

4　対数関数

対数関数は，自然や社会に広く存在する指数現象を，人間にとって把握しやすい比例的変化に変える装置としての役割を果たします。この対数関数の基本的な性質が，人間にとって認識しにくく予想もしにくい指数的変化を，人間にとって自然な比例の世界に移してくれます。

このような視点から底の変換公式を考えたとき，その意味することは＜ひとつの指数現象に対して底の異なる対数表どうしは**比例**している＞ということにあります。例えば，1時間で2倍になるバクテリアの量 $x = 2^t$ を底の異なる2つのメガネ $\log_2$ と $\log_8$ で見た図のような対数表をつくると，対数表どうしが $\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x$ という形で比例していることが簡単に見て取れます。

新聞紙百回折りなど，指数現象が人間にとって予想しにくいということを印象付けるための問題を最初に扱った後，次のように対数を導入します。

1　指数現象と対数

このように人間にとって指数現象というものは大変わかりづらく，予想もしにくい。そこで人間は指数現象を見る便利なメガネとして対数 log というものを発明した。

$\log_2$　のメガネで　　8を見ると

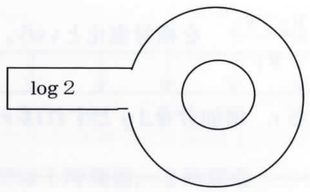
　　　　　　　　　　16を見ると

$\log_3$　のメガネで　　9を見ると

　　　　　　　　　　27を見ると

$\log_a$　のメガネの働きは　$\boxed{}$

授業では厚紙を虫メガネの形に切り抜き，柄の部分に $\log_2$，$\log_3$，$\log_{10}$ 等と書いたものを用意し，「この不思議なメガネで見ると……」などのように進めます。



2　対数表

1時間で2倍になるバクテリア1gがある。このバクテリアの重さの変化の様子を1時間毎に見ると，下の x のようになる。この x に対応させて y として，$\log_2$ のメガネで見える値を書きなさい。

x	-1/4	-1/2	1	2	4	8	16	32	64	128……
y										

このような表を，2を底とする対数表という。

この対数表を使うと，x のかけ算を log どうしのたし算で計算できる。

例　　　　　　　$8 \times 16 =$　　　を求める

$\log_2$　で見ると　　$3 + 4 = 7$

わり算はどうか　　$256 \div 32 =$　　を求める

$\log_2$　で見ると　　$8 - 5 = 3$

この「対数表」の扱いがこの後の展開の基礎となります。いくつかの練習問題で，積が和に対応していること，そのことで計算が簡単になることを確かめます。

3　対数の計算規則

$\log_2$ の対数表で行ったことを $\log_a$ の対数表を使って一般化する。

x	$1/a^2$	$1/a$		a	M	N	MN
y	-2	-1	0	1	m	n	$m+n$

Ⅰ　$\log_a MN =$

Ⅱ　$\log_a \frac{M}{N} =$

また $\log_a M^p = \log_a (M \times M \times \cdots\cdots \times M)$

$= \log_a M + \log_a M + \log_a M \cdots$　だから

Ⅲ　$\log_a M^p =$

前ページの一般化として具体的な例を示しながら対数法則を導きます。

4　底の変換

1つの指数現象例えば1時間で2倍になるバクテリアの量 $x = 2^n$ を底の異なる $\log_2$ のメガネと，$\log_8$ のメガネで見た対数表を比較してみる。

下の $\log_2$ と $\log_8$ の対数表に値を書き入れなさい。

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64……
$\log_2$				0	1		3			6
$\log_8$				0			1			2

これを見ると底の異なる log のメガネで見た対数表どうしは互いに比例している。この関係を使えば $\log_8 x$ の空いている値も簡単に求められる。

問題　対数表の空いている $\log_8 x$ の値を書き入れなさい。

同一の指数現象に対して底の異なる2つの対数表を対応させることによって，対数表どうしが比例していることが，簡単に確かめられます。

底を2から8に変える場合，$\log_8 x$ の値は $\log_2 x$ の値に $\frac{1}{3}$ かければ良い。この3という値は $\log_2$ のメガネで8を見た値になっている。つまり

$\log_8 x = \frac{1}{\log_2 8} \times \log_2 x$　となっている。

一般に，底の異なる対数表どうしは比例しているので，底を a から b に変えるためには

$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \times \log_a x$　とすればよい。

5　片対数グラフ

1時間で2倍になるバクテリア1gがある。この x 時間後の重さを y g とすると，その変化は $y = 2^x$ と表わされる。

＜作業1＞　下の表の $y = 2^x$ の欄に値を書き入れ，グラフ用紙に $y = 2^x$ のグラフを書きなさい。

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$							
$Y = \log_{10} y$							
$Y' = \log_2 y$							

＜作業2＞　表の下の段の Y の欄に，y の値を $\log_{10}$ のメガネで見た値を書き入れ，グラフ用紙にこの $Y = \log_{10} y$ のグラフを書きなさい。

＜作業3＞　y の値を $\log_2$ のメガネで見た Y' の値を書き入れ，この $Y' = \log_2 y$ のグラフを書きなさい。

このように一定の倍率で変化する指数現象を log のメガネで見たグラフを書くと，log の底にかかわらずそのグラフは直線になる。それで log のメガネで見たグラフを使えば，指数現象の将来の予測が簡単にできる。

授業ではこのあとあらかじめ縦軸に数字を目盛った片対数グラフを配り，$y = 2^x$ のバクテリアの増殖の様子や，戦後の日本の自動車生産台数などのグラフを作ります。

注 1）板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』（岩波書店）を参照した。
2）小杉肇『e の数学』（恒星社厚生閣）1頁。
3）田村二郎『微積分読本』（岩波書店）176頁～178頁を参照した。
4）詳しくは須田勝彦・氏家英夫『量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導』（北海道数学教育協議会高校サークルブックレット）参照。

（北海道・白樺学園高校）