量から微積分へ（その１）

高校生のための量と数

◆氏家　英夫

はじめに

「量に基づく数学教育」という視点は，関数指導の中心を量的変化の解析におくという方向を生み出してきました。しかし，量変化としていくつかの運動学的法則を対象とし，関数の増減，変化率，積分法，微分法などの指導を授業のレベルで確立することは，いまだに重要な課題だと思います。どのような量のどのような変化を解析するかという問題への，指導過程を含めた提案が求められています。

1　量と数の指導について

高校進学の輪切りの中で，これまで多くの高校において「基礎学力の不足」が言われ，「基礎学力回復」の試みがなされてきました。しかし，その多くは内容と方法において，単なる小中の復習の域を出ていなかったように思われます。それまでの小中学校の授業で落ちこぼされてきた生徒たちに，より貧困な内容と方法でより少ない時間の中で復習をさせても，落ちこぼしは必ず再生産されることになるでしょう。また，高校の数学にはじめて向かい合おうとしている彼らに，小中学校の復習をさせることは，かえって彼らの高校生としての新しい意欲をなくさせ，プライドを傷つける結果となることもあるのではないでしょうか。

これについて数教協が生み出してきた実践に「量数概論」という形での「高校数学入門」の取り組みがあります。これは「数教協による『量の体系』と『水道方式』は理論的にも実践的にも著しい成功をおさめ……（それを）高校生に適合したカリキュラムで高校教育へ導入」[1]する試みでした。それは「単なる『中学校のまとめ』や『中学校までの復習』ではない。……『数学教育現代化』の理念によって……小学校・中学校・高校という各教育体系に有機的連関を与えるものである」[2]とされました。その内容は，自然数から無理数までの数について，分離量・連続量・外延量・内包量といった「量の理論」に基づき展開していくものでした。この取り組みは大変貴重で重要な成果を残したと思います。しかし，その後この取り組みはほとんど発表されていませんし，決定版と言えるような授業実践はいまだ生み出されていません。また多くの高校では，教科書に入る前にこれらの量の系統，分類を授業で展開することは，時間的制約もあり難しいことになっていると思います。

では，いかにして高校生に量と数の概念を形成することができるでしょうか。私たち北海道高校サークルの中では，「それは高い立場で見直すということしかないのでは」という議論になっています。

量と数について，このとき参考になるのは田村二郎『量と数の理論』[3]です。量と数の関係を問題とするとき，それまでは，数は量の測度として扱われることが多かったように思います。これに対して『量と数の理論』は，「もともと異質の概念である量と数を明確に区別し，数を量空間の変換とみなす」ことによって，自然数から実数という数の導入を数学的に基礎づけています。例えば「自然数は個数を表す」という立場からは，長さと自然数を結びつけることは不自然なこととなりますが，自然数を「量空間の倍変換とみなす」ことによって，n倍変換と自然数nが同一視されることになります。また有向量の「量空間の変換として負の数を導入すれば，スタンダール以来学習者を悩ませてきた‘正負の数の計算規則’は，一つの‘定理’として簡単に証明される」[4]ことになります。

2　高校生のための量と数

こうしたことから高校に入学した新入生に数概念の基礎を形成することを目的とした授業プラン「高校生のための量と数」が取り組まれました。

> **第１章　自然数とその演算**
>
> バラバラの物の個数を表すのには１，２，３，……などの数が用いられる。これらの数を自然数と呼ぶ。一方，世の中は長さ，重さ，面積などの「量」であふれている。こうした長さなどの量については個数ということは考えられないので，私たちは適当な長さを「単位」として決め，いろいろな長さがこの単位の何倍になっているかを，数を用いて表す。
>
> **ア　加法**
>
> 長さなどの量は加えることができる。
>
> **練習１**　次の２つの長さを加えなさい。
>
> 長さMの２倍$2M$と３倍の長さ$3M$とを加えれば$5M$になる。これに対応して自然数の加法も自然に決められる。　　$2+3=5$

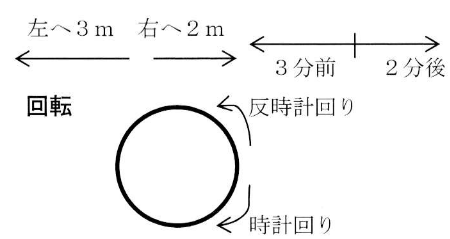
この文脈ではかけ算は倍の合成として扱うのが自然ですが，あとで出てくるマイナスの乗法や分数の乗法の意味付けのために，ここでは正比例型で定義しておきます。

> **イ　乗法**
>
> 「１あたり量」というものを考える。例えばうさぎ１匹あたり耳２本，３輪車１台あたりタイヤ３本，……このようなある法則性を表現する量を「１あたり量」と呼び，２本/ひき　３本/台などと表す。
>
> **練習２**　１あたり量の例を４～９について考えなさい。
>
> 乗法は１あたり量から全体の量を求める計算である。　　１あたり量×いくつ分 = 全体量

練習２はいろいろな例が生徒から出てきて楽しい授業になります。除法は乗法の逆として，等分除と包含除を説明します。次の減法の定義はマイナスの引き算との関係で重要です。

> **ウ　減法**
>
> ２つの同じ種類の量があって$A<B$ならば
>
> $A+X=B$
>
> となるような量Xが存在する。このようなXを「BとAの差」といい　$B-A$　で表す。
>
> これに対応して２つの自然数a，bについて$a<b$ならば$a+x=b$となるようなxが存在し，それを「bとaの差」といい　$b-a$　で表す。

次に正負の数を導入します。正負の数の概念を形成するということの内容には，次の３点を含んだものでなければならないと思います。①マイナスの量を表す－と引き算の－の区別と同一視。②量のレベルでの対称性。③数のレベルで対称性が崩れていること。有向量を基礎にした正負の数の指導によって，これら基礎的な問題に対する解答が可能となります。

> **第２章　有向量と正負の数**
>
> 長さや重さ，面積のような大きさだけを持つ量をユークリッド式量と呼ぶ。これに対して，世の中には，移動，回転，時刻の変化，電流など，大きさのほかに方向を持つ量がある。このような量を有向量と呼ぶ。ここでは東と西，右と左など，互いに逆の２つの方向をもつ有向量を考える。
>
> **例　移動**　　　　　　　　**時刻の変化**
>
> 
>
>
> ここでは白樺通りに沿っての移動を考える。移動の方向は東と西の２つの方向である。例えば，東へ８ｍとか西へ５ｍ等々。簡単のためにこれを（東８）とか（西５）のように表す。
>
> **ア　加法**
>
> こうした移動は加えることができる。東へ８

m，西へ５m移動すると，結果は東へ３m移動している。

練習１　次の加法を計算しなさい。

（東７）＋（西４）＝

（西９）＋（東６）＝

（西５）＋（東３）＋（西９）＝

（東３）＋（西３）＝

Aと逆向きの方向を持ち同じ大きさを持つ量をAの反対量といい　A'で表す。

$A+A'$は移動しないという結果となる。この量をゼロ量と呼び０で表す。　$A+A'=0$

練習２　次の量はどのような量か。

（東３）′＝　　　　　（西５）′＝

ここで減法の定義「$A+X=B$のとき，XをAとBの差といい，$B-A$　と表す」より，

$A+A'=0$　だから　$A'=0-A$

$0-A$　を　$-A$と略することにすれば

$A'=-A$

すなわち　反対量（　）′を減法の記号－を用いて　－（　）と表すことができる。

練習３　次の量はどのような量か。

－（東８）＝　　　　　－（西７）＝

こうして減法の－と反対量を表す－との区別と同一視がなされます。$-A=A'$と同時に$-A'=A$が成り立ちますから，Aと反対量A'との関係はここでは完全に対称的です。

ここで有向量の２つの向きの一方を＋の向きと決めてやれば，もう一方の向きは－を用いて表すことができる（時間の前後とか増加減少のように＋の方向が自然に決まる量もある）。

例えば，東と西の移動について，東の方向を＋と決めれば，西の方向は－で表すことができる。

（東５）＝＋５　　（西３）＝－３

練習４　次の加法を計算しなさい。

（＋７）＋（－４）

（－９）＋（＋６）

（－５）＋（－２）＋（＋４）＋（－６）

このような場合加法の記号＋とかっこを省略して　－５－２＋４－６　と書くのが普通である。

練習５　次の加法を＋とかっこを省略してから計算しなさい。

（－３）＋（＋５）＋（－６）

（＋４）＋（－３）＋（＋５）＋（－８）

（－１）＋（＋７）＋（＋４）＋（－３）

練習６　次の計算をしなさい。

－２＋８－７＋９

－１－７

３－７＋９－11

ところで－は反対量を表したのだから，例えば

－（＋５）＝－５　　－（－３）＝＋３

練習７　かっこをはずして計算しなさい。

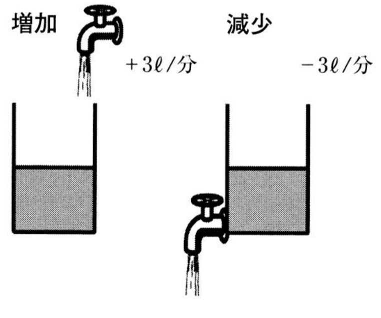
３－（＋５）－（－８）－（＋２）＋（－６）

－３－（－７）＋（－14）－（＋10）

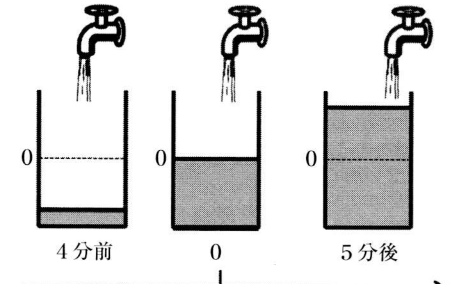
次に乗法に移ります。量の増加減少と時間の前後といった，＋－が自然に決まっている有向量を用いた方が，自然でわかりやすいと思います。

イ　乗法

乗法とは　１あたり量×いくつ分　で全体量を求めることであった。有向量の乗法として，１あたり量として１分あたりの水量の増減を考え，いくつ分として時間を考える。



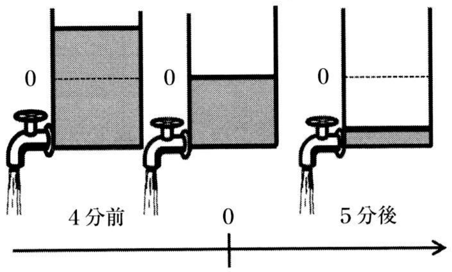
a　１あたり量が増加（＋）の場合



(＋3ℓ/分)×(－4分)　(＋3ℓ/分)×(＋5分)

＝　　　　　　　　　　＝

b　1あたり量が減少（－）の場合



(－3ℓ/分)×(－4分)　(－3ℓ/分)×(＋5分)

＝　　　　　　　　　　＝

こうして有向量の乗法に基づき正負の数の乗法が自然に導かれる。

(＋)×(－)＝(－)　　(＋)×(＋)＝(＋)

(－)×(－)＝(＋)　　(－)×(＋)＝(－)

第3章　有理数

ここで長さなどのユークリッド式量の世界にもどる。長さや面積などの量には次の重要な性質がある。

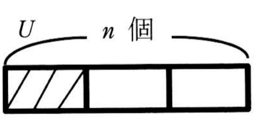
ある量 M と自然数 n に対し

$U \times n = M$　となるような量 U が存在する。

このような量 U を「M の n 等分」といい

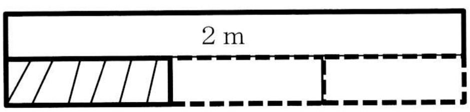
n 個で M になる量 U を

$U = \frac{1}{n}M$ と表す。

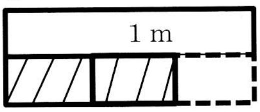


問題　3個で1mになる長さを $\frac{1}{3}$m という。それでは $\frac{2}{3}$m はどのような長さか。

①3個で2mの長さ



② $\frac{1}{3}$m が2個の長さ



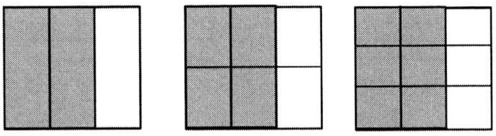
分数には商分数と分割分数の2つの意味があります[5)]。特に①の商分数の論理を説明しておかないと分母に0がとれないことが説明できません。

ここで分数の分母には0をとれないことは明らかである。$\frac{3}{0}$m とは0個で3mになる長さということになるが，そのような長さは存在しない。また $\frac{0}{0}$m とは0個で0mになる長さということになるが，これはすべての長さがあてはまり，特定できない。

ア　倍分・約分

分数の計算にとって次の原理が本質的である。

分数の分母と分子に，同じ数をかけても，同じ数で割っても，分数の大きさは変わらない



$\frac{2}{3}$　　$\frac{4}{6}$　　$\frac{6}{9}$　等々

練習1　次の分数を分母が60になるように倍分しなさい。

$\frac{8}{15}$　　$\frac{8}{12}$

練習2　次の分数を約分しなさい。

$\frac{42}{63}$

イ　加法・減法

分母が同じであれば，分数の加減は簡単である。分子同士をたしたり引いたりすればよい。

練習3

$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$　　$\frac{7}{12}-\frac{11}{12}$

分母が異なる場合は倍分を用いて通分する。

練習4

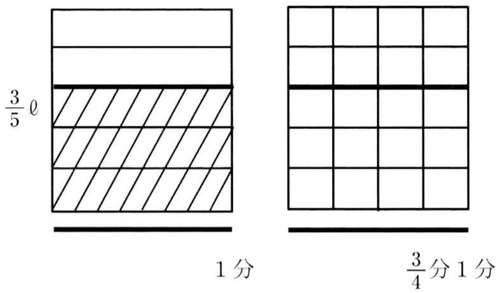
$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$　　$\frac{5}{9}-\frac{11}{12}$

ウ　乗法

分数の乗法を考えるために，1あたり量として「1分あたり何ℓ増えるか」という「増加速度」ℓ/分を考える。いくつ分は時間（分）で，全体量は増加量（ℓ）である。例として増加速度 $\frac{3}{5}$ ℓ/分で，$\frac{3}{4}$ 分後の増加量を求める。

$\frac{3}{5}$ ℓ/分×$\frac{3}{4}$分

問題　このときの全体量の部分に斜線を入れよ。



・分母は1ℓを5等分したものをさらに4等分しているので□が 5×4 で20個

・分子は□が3×3で9個

・こうして全体量は

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{5\times4}=\frac{9}{20}(\ell)$$　となる。

すなわち分数の乗法は分母同士，分子同士をかければよい。

練習5　次の計算をしなさい。

$\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$　　　　$\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}$

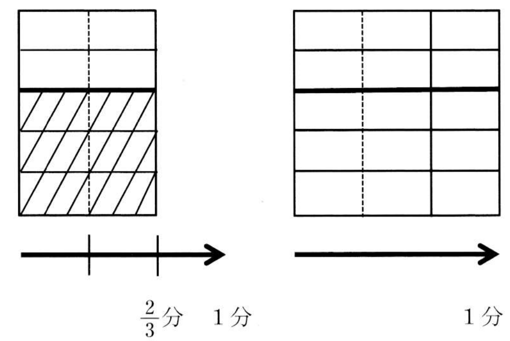
エ　除法

除法には1あたり量を求める除法といくつ分を求める除法がある。ここでは1あたり量を求める除法を考えよう。

例えば　$\frac{3}{5}$ℓ 増えるのに $\frac{2}{3}$ 分かかったときの1あたり量を求める。

$\frac{3}{5}$ℓ ÷ $\frac{2}{3}$分

問題　1分あたりの量の部分に斜線を入れよ。



こうして分数の割り算は割る方を逆にしてかければよい。

実数は『量と数の理論』では切断によって定義されています。「Q^+の切断

$$\alpha=(A\mid\overline{A})$$

において，max Aはないとする。このとき

$$V:U=(A\mid\overline{A})$$

となるようなVをUのα倍といい，αUで表す」[6]。

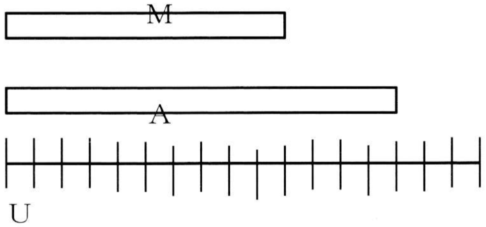
しかし，この内容は高校数学の範囲を越えます。そこで，ここでは小数をもちいて実数を定義することにします。

第4章　実数

基本量Mである量Aを測ることを考える。十分大きな自然数mを選び，Mをm等分した量Uをつくる。次にこの小さい量Uを

U，$U\times2$，$U\times3$……

と倍にしていって順にAと比較する。いつかはAよりも大きくなる。



このとき，どこかで等式

$$U\times n=A$$

が成り立てば

$$A=\frac{n}{m}M$$　となる。

問題　どんな長さAについてもこのような等式が成り立ち

$$A = \frac{n}{m}M$$

とすべて分数（有理数）で表すことができるか。

この問題を考えるために10進小数を導入する。つまり等式が成り立たないとき，どんどん基本単位を10等分して，

$$a = x + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \cdots\cdots$$

として，これで　$A = aM$　と表すことを考える。

ア　分数を小数にする

すべての分数は小数にすることができる。割り算を実行すればよい。

練習１　次の分数を小数で表しなさい。

$\frac{1}{2}$　　　$\frac{1}{3}$　　　$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}$　　　$\frac{1}{6}$　　　$\frac{1}{7}$

このように分数は有限小数と，循環する無限小数とに分かれる。

イ　小数を分数にする

有限小数は簡単に分数にすることができる。

練習２　次の小数を分数にしなさい。

0.3　　　3.27

循環する無限小数の場合は，循環するケタ数だけ10^nをかけて，そこから元の数をひいて循環する部分を消去してやればよい。

例

$$\begin{array}{rrl} & a = & 0.424242\cdots\cdots \\ & 100a = & 42.424242\cdots\cdots \\ -) & a = & 0.424242\cdots\cdots \\ \hline & 99a = & 42 \end{array}$$

$$a = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

練習３　次の循環する無限小数を分数にしなさい。　0.373737……

ウ　循環しない無限小数

循環しない無限小数も無数に存在する。これらは分数では表すことができないから，有理数ではない。

例えば　0.01001000100001……

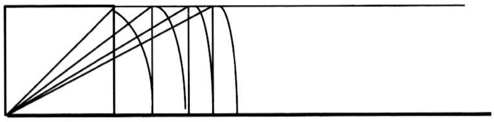
0.102003000400005……

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots\cdots$

$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots\cdots$

$\pi = 3.1415926535\cdots\cdots$等々

ルートについては以下の簡単な作図で長さとして数直線の上に示すことができる。



1　√2　√3　2√5

これらの循環しない無限小数を無理数と呼ぶ。有理数と無理数を合わせた全体を実数と呼ぶ。

実数αによって，すべての長さAは

$$A = \alpha M$$

と表すことができる。

量と数についてはこれで終えて，次回は量に基づく関数指導について，１次関数，２次関数，指数関数，対数関数の指導過程を具体的に見ていきたいと思います。

注１）森毅・市川徹『量数概論』明治図書，1968年，１ページ

２）同上，１ページ

３）田村二郎『量と数の理論』日本評論社，1978年

４）同上，２ページ

５）大田邦郎「小学校の分数指導における新しい試み」『教授学研究シリーズ』３　北海道大学教育学部教育方法研究室，1978年，２ページ

６）田村二郎『量と数の理論』106ページ

（北海道・白樺学園高校）